Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
1. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket a valós számok körében:

a) $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 7\\ 3x+4y+z &= 11\\ 5x-y+2z &= 3\\ 2x-y-z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 7\\ 3x+4y+z &= 11\\ 5x-y+2z &= 3\\ 2x-y-z &= 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 7\\ 3x+4y+z &= 11\\ 2x+y-z &= 4\\ x-2y-3z &= -3 \end{aligned}$$

2. Tekintsünk egy k ismeretlenes, n egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t = \infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$k<n$			
$k=n$			
$k>n$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$k<n$			
$k=n$			
$k>n$			

3. Adott 2017 (valós) szám úgy, hogy közülük bármely 2016 összege 2015. Melyek ezek a számok?

4. Hány megoldása van a modulo 3 test felett az alábbi egyenletrendszernek?

$$x_1+2x_2+x_3+x_4=2; \quad 2x_1+x_2+2x_3+x_4=0; \quad 2x_1+x_2+2x_3=0.$$

5. Hogyan ábrázolhatjuk geometriailag a valós együtthatós kétismeretlenes (és akárhány egyenletből álló) egyenletrendszereket? Hogyan látszik a megoldhatóság és a megoldásszám? Mi a helyzet három ismeretlen esetén?

6. Igazoljuk, hogy ha egy racionális együtthatós egyenletrendszernek a valós számok körében van megoldása, akkor a racionális számok körében is van megoldása.

7. a) Micimackó gondolt száz egész számot, ezek $x_1, \ldots, x_{100}$. Malacka megkérdezheti tőle bármely olyan kifejezés értékét, amelyet ezekből az összeadás és kivonás segítségével képezünk, pl. mennyi $x_1+8x_2-7x_3$. A következő kérdés mindig függhet az előzőre kapott választól. Legkevesebb hány kérdéssel tudja Malacka kitalálni a száz számot?

*b) Mennyiben változik a helyzet, ha Micimackó elárulja, hogy pozitív egészekre gondolt?

****8.** 2017 kavicsról tudjuk, hogy közülük bármelyiket elhagyva a megmaradó 2016 kavics két olyan, egyaránt 1008 darabból álló csoportra osztható, hogy azokat egy kétkarú mérleg egy-egy serpenyőjébe pakolva egyensúly jön létre. Mutassuk meg, hogy ekkor az összes kavics egyenlő súlyú.