

Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz  
10. gyakorlat

1. Tegyük fel, hogy egy egész együtthatós polinom öt különböző egész helyen vett helyettesítési értéke 2017. Mutassuk meg, hogy ekkor semmilyen egész helyen sem veheti fel a 2031-et.
2. (a) Hány olyan legfeljebb harmadfokú  $f$  polinom van  $\mathbb{R}[x]$ -ben, amelyre  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 6$ ,  $f(4) = 8$ ?
- (b) Hány olyan negyedfokú  $f$  polinom van  $\mathbb{R}[x]$ -ben, amelyre  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 6$ ,  $f(4) = 8$ ?
3. Legyen  $n$  pozitív egész,  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  páronként különböző valós számok, és legyen

$$\ell_i = \frac{\prod_{\substack{k \neq i, \\ k \leq n+1}} (x - a_k)}{\prod_{\substack{k \neq i, \\ k \leq n+1}} (a_i - a_k)}, \text{ ha } i = 1, 2, \dots, n+1.$$

- (a) Mit mondhatunk  $\ell_i(a_j)$ -ről?
- (b) Határozzuk meg (zárt alakban) a  $\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i$  polinomot.
4. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
  - (a) Ha egy komplex együtthatós polinom minden racionális helyen racionális értéket vesz fel, akkor a polinom minden együtthatója racionális.
  - (b) Ha egy komplex együtthatós polinom minden egész helyen egész értéket vesz fel, akkor a polinom minden együtthatója egész.

\*5. Tegyük fel, hogy  $f$  legfeljebb  $n$ -edfokú, valós együtthatós polinom, amelyre  $f(k) = 2^k$  teljesül, ha  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Határozzuk meg  $f(n+1)$ -et.

\*6. Ali Baba a kincset a 40 rablóra akarja hagyni, de fél, hogy azok összevesznek, és ezért olyan módszert szeretne, hogy csak akkor juthassanak hozzá, ha már legalább 25 rabló előre megegyezett, hogyan osztozkodnak. A kincshez vezető útvonalat egy számítógép rejti, ehhez csak úgy lehet hozzáférni, ha valaki bepötyögi a megfelelő jelszót, ami egy (möglegyetösen nagy) természetes szám. Ali Baba az Interpol tanácsára egyenként mindegyik rablónak a fülébe sűg valamit. Ha bármelyik 25 rabló összefog, akkor meg tudja fejteni a kulcsszámot, de 24-en hiába próbálkoznak, együttesen sem lesz semmilyen információjuk a számról. Mit tanácsolt Ali Babának az Interpol(áció)?

7. Határozzuk meg a  $\Phi_m$  körosztási polinomokat  $m \leq 8$ -ra.

8. Legyen  $p$  prímszám. Határozzuk meg a  $\Phi_p$  és  $\Phi_{p^2}$  körosztási polinomokat.

9. Mi lehet egy körosztási polinom konstans tagja?

\*10. Tegyük fel, hogy  $m$  páratlan. Mutassuk meg, hogy  $\Phi_{2m} = \Phi_m(-x)$ .

\*11. Legyen  $m$  pozitív egész és tegyük fel, hogy  $p$  prím és  $p \mid m$ . Mutassuk meg, hogy  $\Phi_{pm} = \Phi_m(x^p)$ .