Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
2. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok 2017-edik hatványát.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük a 3×3-as (pl.) valós elemű mátrixokat.

(a) Legyen $E^{(i,j)}$ az a mátrix, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról, illetve jobbról megszorzunk $E^{(i,j)}$-vel?

(b) Adjunk meg olyan A mátrixot, amellyel egy tetszőleges X mátrixot balról szorozva az X első sorának minden eleme megkétszereződik, X többi eleme pedig az ellentettjére változik. Mi történik, ha X-et jobbról szorozzuk A-val?

(c) Egy tetszőleges X mátrixot milyen mátrixszal és melyik oldalról szorozva érjük el, hogy X második sorának kétszerese hozzáadódjék a harmadik sorhoz, miközben az első és második sor ne változzék?

3. Számítsuk ki az $N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix hatványait. Általánosítsunk!

4. Legyen A egy $n \times k$-as mátrix, $\underline{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, és tekintsük a mátrix alakban felírt

(E) $A\underline{x} = \underline{b}$ és **(H)** $A\underline{y} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszereket, ahol $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$

illetve $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$ az ismeretlenekből képezett oszlopmátrixok. Mutassuk meg a következőket.

(a) Ha $\underline{x}$ megoldása **(E)**-nek és $\underline{y}$ megoldása **(H)**-nak, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldása **(E)**-nek.

(b) Ha $\underline{x}$ és $\underline{x}'$ megoldásai **(E)**-nek, akkor $\underline{x} - \underline{x}'$ megoldása **(H)**-nak.

Tehát **(E)** összes megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy valamelyik megoldásához hozzáadjuk **(H)** megoldásait.