Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
3. gyakorlat

1. Végezzük el az alábbi műveleteket komplex számokkal:

(a) $\dfrac{7+6i}{2+i} - \dfrac{5+i}{2+3i}$; (b) i^{9999}; (c) $(5+8i)^{20}(-5+8i)^{19}$; (d) $\left(\overline{1+i}\right)^2$;
(e) $1+i+i^2+\cdots+i^{2017}$; (f) $1+(1+i)+(1+i)^2+\cdots+(1+i)^{2017}$.

2. (a) „Vonjunk négyzetgyököt” a $-21+20i$ komplex számból.
(b) Legyen $z = a+bi \neq 0$. Határozzuk meg z négyzetgyökeit. Hány megoldást kapunk?

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok körében:
(a) $z^2+8=0$; (b) $z^2+2z+2=0$; (c) $z^2+(1+i)z+5i=0$.

4. Oldjuk meg az $x^3+6x-4=0$ egyenletet a komplex számok körében.

5. Komplex számok segítségével „belátjuk”, hogy $1=-1$:

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1.$$

Hol a hiba a fenti levezetésben?

6. (a) Oldjuk meg a komplex számok körében az $x^2+x+1=0$ egyenletet. Az eredmény birtokában alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalán álló x^2+x+1 kifejezést.
(b) Alakítsuk háromtényezős szorzattá a komplex számok körében az c^3-1, illetve általánosabban az $a^3-b^3 \big(= b^3\big((a/b)^3-1\big)\big)$ kifejezést.
(c) Hány különböző köbgyöke lehet egy nemnulla komplex számnak?

7. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket külön a valós és külön a komplex számok körében:
(a) $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=1$; *(b)* $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=-1$.