Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
7. gyakorlat

1. Gyűrűt alkotnak-e a 0 polinommal együtt azok a valós együtthatós polinomok, ahol (a) a fokszám páros; (b) minden tag fokszáma páros; (c) a fokszám legfeljebb 100; (d) a fokszám legalább 100; (e) minden tag fokszáma legalább 100; (f) az együtthatók összege 0?

2. Írjuk fel az $f = 2x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x - 6$ polinomot $f = (x+2)g + c$ alakban, ahol c konstans.

3. [*Racionális gyökteszt.*] Legyenek az $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom együtthatói egészek és tegyük fel, hogy a $\frac{b}{c}$ racionális szám gyöke az f-nek. Mutassuk meg, hogy ha $(b, c) = 1$ (vagyis a törtet nem lehet egyszerűsíteni), akkor $b \mid a_0$ és $c \mid a_n$.

4. Határozzuk meg az $x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 36x + 24$ polinom racionális gyökeit és azok multiplicitását.

5. Van-e a $3x^4 + x^3 - 9x^2 + 3x + 2$ polinomnak teljes gyöktényezős alakja?

6. Tegyük föl, hogy az $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom együtthatói egészek és az r racionális szám gyöke f-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor r egész szám.

7. **(a)** Legyen T test, $f \in T[x]$ és $c \in T$. Mutassuk meg, hogy f felírása $f = (x - c)g + m$ alakban (ahol g alkalmas $T[x]$-beli polinom és $m \in T$) egyértelmű, azaz:
ha $(x - c)g_1 + m_1 = f = (x - c)g_2 + m_2$, ahol $g_i \in T[x]$ és $m_i \in T$, akkor szükségképpen $g_1 = g_2$ és $m_1 = m_2$.

(b) Legyenek az $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinom együtthatói egészek és tegyük fel, hogy k egész szám. Mutassuk meg, hogy ha f-et felírjuk $f = (x - k)g + c$ alakban, (ahol g alkalmas polinom és c konstans) akkor g mindegyik együtthatója és c is egész szám.

8. Legyen p prím és $T = \mathbb{Z}_p$.

(a) Mutassuk meg, hogy az $x^p - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomnak $\mathbb{Z}_p$ minden eleme gyöke.

(b) Igazoljuk, hogy $\mathbb{Z}_p[x]$-ben $x^p - x = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x - (p-1))$.

(c) Adjunk újabb bizonyítást a Wilson-tételre
(mely szerint minden p prímszámra $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$).