

Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
8. gyakorlat

1. Hányszoros gyöke a (-1) az $x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ polinomnak?
2. Határozzuk meg az a és b számokat úgy, hogy a $2x^4 - 5x^3 + ax + b$ polinomnak a 3 többszörös (azaz: legalább kétszeres) gyöke legyen.
3. (a) Állítsuk elő az $f = x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 5$ polinomot
$$a_4(x - 2)^4 + a_3(x - 2)^3 + a_2(x - 2)^2 + a_1(x - 2) + a_0$$
alakban (alkalmas a_i együtthatókkal).
(b) Adjunk meg olyan c számot, amelyre a fenti polinom
$$b_4(x - c)^4 + b_2(x - c)^2 + b_1(x - c) + b_0$$
alakú (alkalmas b_i együtthatókkal). Végezzük is el az átírást.
4. Tegyük fel, hogy egy egész együtthatós polinom öt különböző egész helyen vett helyettesítési értéke 2017. Mutassuk meg, hogy ekkor semmilyen egész helyen sem veheti fel a 2031-et.
5. (a) Mennyi a $87x^6 - \frac{20}{17}x^4 + \sqrt{2017}x^2 - 3x + 7$ polinom (komplex) gyökeinek a reciprokösszege?
(b) Mennyi a $8x^6 - 80x^5 - 16x^4 + \sqrt{2017}x^2 - 3x + 7$ polinom (komplex) gyökeinek a négyzetösszege?
6. A $2x^3 + 14x^2 + cx + 56$ polinomnak van két (komplex) gyöke, amelyek egymás ellentettjei. Határozzuk meg a gyököket.
7. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) harmadfokú polinom három (komplex) gyöke számtani sorozatot alkosson?
8. Legyenek a, b, c, d olyan komplex számok, amelyekre
$$a + b + c = d \text{ és } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}.$$
Mutassuk meg, hogy a, b, c között van két olyan, amelyek egymás ellentettjei.
9. Mutassuk meg, hogy a $2x^6 - 8x^5 + 7777x^4 + 46.11112367x^3 - \sqrt{47}x^2 + 10x - 333333^{5555555}$ polinomnak létezik olyan komplex gyöke, ami nem valós.