Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
9. gyakorlat

1. Osszuk el maradékosan az x^5+3x^2-x+1 polinomot $-x^3+3x^2+4x+1$-gyel.

2. Mit ad maradékul az $x^5-x^4+3x^3-4x^2+2$ polinom $(x-2)(x+1)$-gyel osztva? Oldjuk meg a feladatot a Horner-elrendezés segítségével is.

3. **(a)** Mit ad maradékul az $x^{25}-x^{14}+3x^{13}-4x^9+2$ polinom $x^3-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$-vel osztva?

(b) Legyenek n, k és ℓ pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy $x^{3n+2}+x^{3k+1}+x^{3\ell}$ osztható x^2+x+1-gyel.

4. Mit ad maradékul az $x^{55}-x^{26}+7x^{17}-x^8+2x-3$ polinom x^2-x+1-gyel osztva?

5. Bontsuk fel az alábbi polinomokat irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

$x^{12}-1$, x^4+4x^2-8, x^4-4x^2+8, x^4+4.

6. **(a)** Van-e olyan valós együtthatós polinom, amelynek valós helyettesítési értékei között előfordul a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$, de nem fordul elő a $\sqrt{15}$?

(b) Van-e olyan komplex együtthatós polinom, amelynek komplex helyettesítési értékei között előfordul a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$, de nem fordul elő a $\sqrt{15}$?

7. Az alábbiak közül melyek igazak $\mathbb{R}[x]$-ben?

(a) Minden 2017-edfokú polinomnak van 99-edfokú osztója.

(b) Minden 2016-odfokú polinomnak van 99-edfokú osztója.

(c) Minden 2016-odfokú polinomnak van 100-adfokú osztója.

8. Legyen $f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\in\mathbb{C}[x]$, és tegyük föl, hogy $a_na_0\neq 0$. Legyen $f^-=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$.

(a) Mutassuk meg, hogy ha f gyöktényezős alakja $f=a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)$, akkor f^- gyöktényezős alakja $f^-=a_0\left(x-\dfrac{1}{\beta_1}\right)\left(x-\dfrac{1}{\beta_2}\right)\ldots\left(x-\dfrac{1}{\beta_n}\right)$.

(b) Tegyük fel, hogy $f\in\mathbb{Q}[x]$, f legalább másodfokú és f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk, hogy akkor f^- is irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

***(c)** Legyen T kommutatív test, $f\in T[x]$, f legalább másodfokú és f irreducibilis T fölött. Igazoljuk, hogy akkor f^- is irreducibilis T fölött.

9. Hány olyan irreducibilis polinom van $\mathbb{Z}_2[x]$-ben, amelynek a foka
(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 4?

10. Tegyük föl, hogy az $f\in\mathbb{Z}[x]$ polinomra $f(1-9i)=0$. Igazoljuk, hogy $82\mid f(0)$ és $81\mid f(1)$.

****11.** **(a)** Legyenek $a_1,a_2,\ldots,a_n$ páronként különböző egész számok ($n\geqslant 1$). Mutassuk meg, hogy $f=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)-1$ irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben.

(b) Legyenek $a_1,a_2,\ldots,a_n$ páronként különböző egész számok ($n\geqslant 1$). Igaz-e, hogy $g=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)+1$ irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben?