Algebra és számelmélet 2-tk, 2017. tavasz
1. ZH: Eredmények, rövid megoldások, pontozás

1. Határozza meg az

$$\begin{aligned} x \ &+\ 2y\ &+\ 3z &= 14 \\ 2x\ &+\ 3y\ &-\ 5z &= -7 \\ 4x\ &+\ 7y\ &+\ z &= 21 \end{aligned}$$

egyenletrendszer összes olyan megoldását, amelyre $x + y + z = 6$ teljesül.

Megoldás. Az egyenletrendszert például a Gauss-féle kiküszöböléssel megoldva kapjuk: $x = -56 + 19z,\ y = 35 - 11z$, ahol z szabad paraméter **(4p)**. (Ezek a megoldások természetesen más paraméterezéssel is előállíthatóak.) Ekkor $6 = x+y+z = (-56+19z)+(35-11z)+z = -21+9z$, amiből $z = 3$, és így $x = -56 + 19 \cdot 3 = 1$, $y = 35 - 11 \cdot 3 = 2$ **(2p)**. A legegyszerűbb persze az, ha az $x + y + z = 6$ egyenletet hozzávesszük a megadott egyenletrendszerhez, és rögtön ezt a négy egyenletből álló rendszert oldjuk meg – ennek egyetlen megoldásaként a fenti $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$ megoldást kapva **(6p)**.

2. Legyen $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Határozza meg az összes olyan valós elemű X mátrixot, amelyre $F \cdot X = X \cdot F$ teljesül.

Megoldás. $F \cdot X$ pontosan akkor értelmes, ha X-nek három sora van, $X \cdot F$ pedig akkor, ha X-nek három oszlopa van; tehát $X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}$. Ezzel $F \cdot X = \begin{bmatrix} 2x_{3,1} & 2x_{3,2} & 2x_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X \cdot F$ pedig $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2x_{1,1} \\ 0 & 0 & 2x_{2,1} \\ 0 & 0 & 2x_{3,1} \end{bmatrix}$ **(4p)**. Ezek akkor és csak akkor egyenlők, ha $x_{1,1} = x_{3,3}$ és $x_{2,1} = x_{3,1} = x_{3,2} = 0$. Tehát $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, ahol $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ tetszőleges valós számok **(2p)**.

3. Gyűrűt, illetve testet alkotnak-e a $\mathbb{Z}_n$-beli nullosztók és a nulla a modulo n összeadásra és szorzásra (a) ha $n = 10$; (b) ha $n = 9$?

Megoldás. A $\mathbb{Z}_n$-beli összeadás és szorzás kommutatív és asszociatív, a szorzás disztributív az összadásra, és a megadott elemek között ott van a nulla **(1p)**. Ahhoz, hogy gyűrűt alkossanak, azt kell megvizsgálni, hogy ha a és b nullosztó vagy nulla, akkor teljesül-e, hogy $a + b$, $a \cdot b$ és $-a$ is nullosztó vagy nulla **(1p)**. Az $n = 10$-nél ez nem teljesül: például 2 és 5 nullosztó, de $2 + 5 = 7$ nem, ekkor tehát nem kapunk gyűrűt **(1p)**. Ha $n = 9$, akkor a $\mathbb{Z}_9$-beli nullosztók és a nulla a következők: 0, 3 és 6 **(1p)**. Mivel $-0 = 0$, $-3 = 6$, $-6 = 3$, $0 + 0 = 0$, $3 + 3 = 6$, $6 + 6 = 3$, $0 + 3 = 3$, $0 + 6 = 6$, $3 + 6 = 0$, és $0 \cdot 0 = 0 \cdot 3 = 0 \cdot 6 = 0$, és $3 \cdot 3 = 0$, $3 \cdot 6 = 0$, és $6 \cdot 6 = 0$, azért $\{0, 3, 6\}$ gyűrű a $\mathbb{Z}_9$-beli műveletekre **(1p)**. Mivel ekkor bármely két elem szorzata nulla, ennek a gyűrűnek nincs egységeleme, így nem is lehet test **(1p)**.

4. Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyeknek megfelelő z komplex számokra $|z - 2| = |\overline{z} - 2i|$?

I. Megoldás. Ha $z = a + bi$, akkor $|z - 2| = |(a - 2) + bi| = \sqrt{(a - 2)^2 + b^2}$ és $|\overline{z} - 2i| = |a - (b + 2)i| = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2}$ **(2p)**. A feltétel tehát $\sqrt{(a - 2)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b + 2)^2}$, azaz – a két nemnegatív szám négyzetét véve – $(a - 2)^2 + b^2 = a^2 + (b + 2)^2$ **(2p)**. Rendezve: $-4a = 4b$, vagyis $-a = b$, ami éppen az origón átmenő -1 meredekségű egyenest (az $y = -x$ függvény grafikonját) adja **(2p)**.

II. Megoldás. Minden komplex számnak annyi az abszolút értéke, amennyi a konjugáltjának; ezért $|\overline{z}-2i| = |\overline{\overline{z}-2i}| = |z+2i| = |z-(-2i)|$ **(2p)**. Így a feltétel: $|z-2| = |z-(-2i)|$. Ez azt jelenti, hogy a z-nek megfelelő pont egyenlő távol van a 2-nek és a $-2i$-nek megfelelő pontoktól **(3p)**, vagyis e két pont által meghatározott szakasz felező merőlegesén helyezkedik el **(1p)**.

5. Oldja meg a komplex számok körében az $x^5 = 9\cdot\overline{x}$ egyenletet.

Megoldás. Nyilván $x_1 = 0$ megoldás **(1p)**; a továbbiakban a nemnulla megoldásokat keressük. Az x trigonometrikus alakja legyen $x = r(\cos\beta + i\sin\beta)$, ekkor $x^5 = r^5(\cos 5\beta + i\sin 5\beta)$, $9\cdot\overline{x} = 9r(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta))$ **(1p)**. Ezek pontosan akkor egyenlők, ha az abszolút értékek egyenlők, és a szögek eltérése $360°$ egész számú többszöröse **(1p)**. Tehát $r^5 = 9r$ és $5\beta = -\beta + k\cdot 360°$. Így $r = \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ **(1p)** és $\beta = \dfrac{k\cdot 360°}{6} = k\cdot 60° = 0°,\ 60°,\ 120°,\ 180°,\ 240°,\ 300°$. **(2p)**

Tehát az egyenlet további megoldásai:

$x_2 = \sqrt{3}(\cos 0° + i\sin 0°) = \sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}(\cos 60° + i\sin 60°) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{3}{2}$,

$x_4 = \sqrt{3}(\cos 120° + i\sin 120°) = \sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{3}{2}$,

$x_5 = \sqrt{3}(\cos 180° + i\sin 180°) = -\sqrt{3}$, $x_6 = \sqrt{3}(\cos 240° + i\sin 240°) = \sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2}$, $x_7 = \sqrt{3}(\cos 300° + i\sin 300°) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2}$.

6. Tegyük föl, hogy z és t egymástól és 0-tól különböző komplex számok. Mutassa meg, hogy $\dfrac{z}{t}$ akkor és csak akkor tiszta képzetes szám, ha $|z+t| = |z-t|$.

I. Megoldás. Legyen $z = a+bi$, $t = c+di$, ekkor $|z+t| = |(a+c)+(b+d)i| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)}$, hasonlóan $|z-t| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)}$ **(1p)**. Továbbá $\dfrac{z}{t} = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ **(1p)**. Így

$$|z+t| = |z-t| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd)} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac+bd) = a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd) \Leftrightarrow ac+bd = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{ac+bd}{c^2+d^2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{z}{t} \text{ tiszta képzetes } \textbf{(4p)}.$$

Megjegyzés. A fenti megoldással lényegében egyező, de elegánsabb és áttekinthetőbb megfogalmazás a következő:

$$|z+t| = |z-t| \Leftrightarrow |z+t|^2 = |z-t|^2 \Leftrightarrow (z+t)(\overline{z+t}) = (z-t)(\overline{z-t}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z} + t\overline{t} + t\overline{z} + z\overline{t} = z\overline{z} + t\overline{t} - t\overline{z} - z\overline{t} \Leftrightarrow t\overline{z} + z\overline{t} = 0 \Leftrightarrow$$
$$z\overline{t} = -t\overline{z} \Leftrightarrow \frac{z}{t} = -\overline{\left(\frac{z}{t}\right)} \Leftrightarrow \frac{z}{t} \text{ tiszta képzetes.}$$

II. Megoldás. $|z+t|$ és $|z-t|$ a z és t komplex számoknak megfelelő vektorok által meghatározott paralelogramma átlóinak a hossza **(2p)**. Ezek pontosan akkor egyenlőek, ha a paralelogramma téglalap **(1p)**, azaz szomszédos oldalai merőlegesek egymásra **(1p)**, vagyis a z komplex számnak megfelelő vektor valamilyen $\pm 90°$-os forgatva nyújtással kapható a t komplex számnak megfelelő vektorból **(1p)**. Ez éppen azt jelenti, hogy – alkalmas b valós számmal – $z = bi\cdot t$, azaz $\dfrac{z}{t} = bi$. **(1p)**

Megjegyzés. A bizonyítás érvényben marad a feladat feltételei által megengedett egyetlen elfajuló esetben, $z = -t$ esetén is: ekkor a két ekvivalens feltétel egyike sem teljesül.