(1) Határozza meg az a és b (valós) együtthatók értékét úgy, hogy az x^4+ax+b polinom osztható legyen x^2+2x+1-gyel.

Első megoldás: Az x^2+2x+1 polinom felbomlik elsőfokúak szorzatára $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Ez a polinom tehát akkor oszt egy másikat, amikor annak kétszeres gyöke a -1. (**2 pont**)

Horner elrendezes segitségével megnézzük, milyen feltételt ad a-ra és b-re:

	1	0	0	a	b
-1	1	-1	1	a-1	b+1-a
-1	1	-2	3	a-4	

(**2 pont**).

A -1 pontosan akkor kétszeres gyök, ha $a-4=0$ és $b+1-a=0$, azaz $a=4$ és $b=3$. (**2 pont**)

Második megoldás: Elosztjuk x^4+ax+b-t x^2+2x+1-gyel maradékosan. Az a és a b paraméterek az osztás folyamatát nem befolyásolják, csak a maradékot: $x^4+ax+b=(x^2+2x+1)(x^2-2x+3)+((a-4)x+(b-3))$. (**4 pont**) Az oszthatóság azt jelenti, hogy a maradék 0, amiből rögtön kapjuk, hogy $a-4=0$ és $b-3=0$, tehát $a=4$ és $b=3$ (**2 pont**).

(2) A $2x^3+cx+96\in\mathbb{C}[x]$ polinom egyik gyöke egy másiknak a kétszerese. Mi lehet a c együttható értéke?

A polinomot gyöktényezős alakba írva kapjuk $2x^3+cx+96=2(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-\beta)$-et, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ komplex számok a gyökök. Ekkor a gyökök és együtthatók közötti osszefüggések alapján $96=-4\alpha^2\beta$ és $-(\alpha+2\alpha+\beta)=0$, azaz $3\alpha+\beta=0$ (a polinomok konstans tagját és az x^2 együtthatóját hasonlítottuk össze) (**2 pont**). $\beta=-3\alpha$ a második egyenlet alapján, amit beírva az elsőbe kapjuk, hogy $12\alpha^3=96$, azaz $\alpha^3=8$. Ebből $\alpha_1=2$, $\alpha_2=2\epsilon_1$ és $\alpha_1=2\epsilon_2$ a megoldások, ahol ϵ_1 és ϵ_2 a két primitív harmadik egységgyök (**2 pont**).

Visszahelyettesítve az eredeti polinomba és beírva $\beta=-3\alpha$-t kapjuk, hogy $c=-14\alpha^2$. Három megoldást kapunk: $c_1=-56$, $c_2=-56(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=28-28\sqrt{3}i$ és $c_3=-56(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=28+28\sqrt{3}i$ (**2 pont**).

(3) Adja meg az $x^{101}-2\in\mathbb{R}[x]$ polinom valamelyik másodfokú valós együtthatós osztóját x^2+ax+x alakban.

Az $x^{101}-2$ polinom gyökei $\sqrt[101]{2}\epsilon$ alakúak, ahol ϵ bármelyik 101. egységgyök lehet (**1 pont**). Ekkor egy megfelelő másodfokú polinom $(x-\sqrt[101]{2}\epsilon)(x-\sqrt[101]{2}\bar{\epsilon})$ alakú, ahol $\epsilon\neq 1$ (**2 pont**). Ilyen például az $\epsilon=\cos(\frac{2\pi}{101})+i\sin(\frac{2\pi}{101})$. A konstans tag a komplex gyök abszolút értékének a négyzete, ami $\sqrt[101]{4}$ (**1 pont**). Az x együtthatója pedig a valós rész -2-szerese. azaz $-2\sqrt[101]{2}\cos(\frac{2\pi}{101})$. A polinom így $x^2-2\sqrt[101]{2}\cos(\frac{2\pi}{101})x+\sqrt[101]{4}$ (**2 pont**).

(4) Adja meg az összes olyan d egész számot, amelyre a $4x^{10}+dx+2$ polinomnak van pozitív racionális gyöke.

A racionális gyökteszt azt mondja, hogy ennek a polinomnak csak olyan racionális $\frac{p}{q}$ gyöke lehet, amire p és q relatív prímek és $p \mid 2$, $q \mid 4$ (**2 pont**). Ennek a polinomnak az $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{4}$ nem gyöke, mert a behelyettesítés eredményeként nem kapunk egész számot (**2 pont**). Az 1 akkor gyök, ha $4 + d + 2 = 0$, amiből $d = -6$. Pozitív racionális gyök csak a 2 lehet ezen kívül, amikor $d = -(2^{11} + 1) = -2049$ (**2 pont**).

(5) Igazolja, hogy az $x^{23}+2x^{43}-3x^{73}$ polinom osztható $x^4+x^3+x^2+x+1$-gyel.

Első megoldás: Az $x^4+x^3+x^2+x+1$ polinom az ötödik körosztási polinom, mivel az 5 prím (**1 pont**). A gyökei így a primitív ötödik egységgyökök, mind egyszeres (**1 pont**). Azt kell csak belátni, hogy ezek gyökei az $x^{23} + 2x^{43} - 3x^{73}$ polinomnak is (**1 pont**). Behelyettesitve bármelyiket, amit ϵ-nal jelölünk kapjuk felhasználva $\epsilon^5 = 1$-et, hogy $(\epsilon^5)^4\epsilon^3 + 2(\epsilon^5)^8\epsilon^3 - 3(\epsilon^5)^{14}\epsilon^3 = \epsilon^3 + 2\epsilon^3 - 3\epsilon^3 = 0$ (**3 pont**).

Második megoldás: Azt látjuk be, hogy az $x^5 - 1$ polinom is osztja $x^{23} + 2x^{43}-3x^{73}$ polinomot, ami elég, mert $x^5-1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ (**1 pont**). $x^{23} + 2x^{43} - 3x^{73} = (x^{23} - x^3) + 2(x^{43} - x^3) - 3(x^{73} - x^3)$ (**2 pont**). Kiemelve x^3-öt $x^3\big((x^{20}-1)+2(x^{40}-1)-3(x^{70}-1)\big)$ alakba írható a polinom (**1 pont**). Az $x^{20} - 1$, $x^{40} - 1$ és $x^{70} - 1$ osztható $x^5 - 1$-gyel az $a - b \mid a^n - b^n$ azonosság alapján, tehát az eredeti polinom is (**2 pont**).

(6) Mutassa meg, hogy az x^8+x^4+1 polinom minden komplex gyöke egységgyök, és adja meg legalább az egyiknek a rendjét.

Első megoldás: Az $x^8 + x^4 + 1$ polinomba helyettesítsünk x^4 helyére y-t (**1 pont**). Ekkor az $y^2 + y + 1$ polinomot kapjuk. Ennek gyökei a primitív harmadik egységgyökök (**1 pont**). Így $x^8 + x^4 + 1$ gyökei azok a komplex számok, aminek negyedik hatványa primitív harmadik egységgyök (**1 pont**). Ennek következménye, hogy 12. hatványuk 1, azaz egységgyökök (**1 pont**). A pontos következmény, hogy ezek a primitív tizenkettedik, a primitív hatodik és a primitív harmadik egységgyökök, azaz a rend lehet 3, 6 vagy 12 (**2 pont**).

Második megoldás: $x^8+x^4+1 = \frac{x^{12}-1}{x^4-1}$ (**2 pont**), azaz ennek a polinomnak azok a tizenkettedik egységgyökök a gyökei (**1 pont**), amelyek negyedik hatványa nem 1, azaz rendjük nem osztja 4-et (**1 pont**). Tehát ezek azok a komplex számok, amelyeknek rendje osztója 12-nek, de nem osztója 4-nek. Ezen komplex számok rendje tehát $3, 6$ vagy 12 (**2 pont**).