

1. [F A.2.1d] Döntsük el, hogy az alábbi alakú 2×2 -es valós elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve kommutatív testet alkotnak-e.

$$(d1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}; (d2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; (d3) \begin{bmatrix} a & 2a \\ 4a & 8a \end{bmatrix}; (d4) \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}; (d5) \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

2. [F A.2.2] Legyen $m > 1$ rögzített pozitív egész, és tekintsük azt az m^2 darab $a + bi$ „komplex számot”, ahol az a és b egy-egy modulo m maradék. Definiáljuk az összeadást és a szorzást a komplex számoknál látott műveletek mintájára [tehát pl. $m = 5$ -re $(2 + 3i)(1 + 4i) = (2 - 12) + (3 + 8)i = i$]. Döntsük el, hogy testet kapunk-e, ha (a) $m = 2$; (b) $m = 3$; (c) $m = 5$.

3. [F 2.1.8] Az alábbiakban tegyük fel, hogy a szóban forgó AB , illetve BA mátrix szorzatok értelmesek. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- Ha A -nak van egy csupa 0 sora, akkor ez AB -re is teljesül.
- Ha A -nak van egy csupa 0 sora, akkor ez BA -ra is teljesül.
- Ha A -ban minden sor számtani sorozat, akkor ez AB -re is teljesül.
- Ha A -ban minden sor számtani sorozat, akkor ez BA -ra is teljesül.
- Ha A elemeinek az összege 0, akkor ez AB -re is teljesül.
- Ha A elemeinek az összege 0, akkor ez BA -ra is teljesül.

4. [F 3.1.5a] Oldjuk meg a komplex számok körében a következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x + ix_2 - x_3 &= -i \\ ix_1 - x_2 - ix_3 &= 1 \\ -x_1 - ix_2 + x_3 &= i \\ -ix_1 + x_2 + ix_3 &= -1 \\ x_1 + ix_2 + x_3 &= i \end{aligned}$$

5. [K 1.4.12] Egy négyszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Kössük össze az átellenes oldalakra rajzolt négyzetek középpontjait. Mutassuk meg, hogy az így kapott két szakasz merőleges egymásra, és egyenlő hosszú.

6. Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyeknek megfelelő z komplex számokra

(i) $|z^5 - 3| = |z^5 + 3|$;

(ii) $z^4 = i \cdot \bar{z}^5$?

7. Mutassuk meg, hogy ha a z komplex számra $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ teljesül, akkor minden pozitív egész n -re $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha$.