Algebra és számelmélet 2 (levelező), 2019. tavasz
1. gyakorló feladatsor

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket a valós számok körében:

a) $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 7\\ 3x+4y+z &= 11\\ 5x-y+2z &= 3\\ 2x-y-z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 7\\ 3x+4y+z &= 11\\ 5x-y+2z &= 3\\ 2x-y-z &= 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x+3y+2z &= 7\\ 3x+4y+z &= 11\\ 2x+y-z &= 4\\ x-2y-3z &= -3 \end{aligned}$$

2. Tekintsünk egy k ismeretlenes, n egyenletből álló, $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszert, melynek t (valós) megoldása van ($t=\infty$ is lehetséges). Töltsük ki az alábbi táblázatokat: I jelentse azt, hogy ilyen eset előfordulhat, N pedig azt, hogy nem.

Általános	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$k<n$			
$k=n$			
$k>n$			

Homogén	$t=0$	$t=1$	$t=\infty$
$k<n$			
$k=n$			
$k>n$			

3. Adott 2019 darab (valós) szám úgy, hogy közülük bármely 2018-nak az összege 2017. Melyek ezek a számok?

4. Tekintsük a 3×3-as valós elemű mátrixokat.

(a) Legyen $E^{(i,j)}$ az a mátrix, amelynek i-edik sorában a j-edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról, illetve jobbról megszorzunk $E^{(i,j)}$-vel?

(b) Adjunk meg olyan A mátrixot, amellyel egy tetszőleges X mátrixot jobbról szorozva az X első oszlopának minden eleme megkétszereződik, X többi eleme pedig az ellentettjére változik. Mi történik, ha X-et balról szorozzuk A-val?

(c) Egy tetszőleges X mátrixot milyen mátrixszal és melyik oldalról szorozva érjük el, hogy X második oszlopának kétszerese hozzáadódjék a harmadik oszlophoz, miközben az első és második oszlop ne változzék?

5. Hogyan ábrázolhatjuk geometriailag a valós együtthatós kétismeretlenes (és akárhány egyenletből álló) egyenletrendszereket? Hogyan látszik a megoldhatóság és a megoldásszám? Mi a helyzet három ismeretlen esetén?

6. Igazoljuk, hogy ha egy racionális együtthatós egyenletrendszernek a valós számok körében van megoldása, akkor a racionális számok körében is van megoldása.

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok 2019-edik hatványát.

$$C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -8 & -3\end{bmatrix}\qquad F=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -9 & -3\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\qquad K=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

8. Számítsuk ki az $N_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix hatványait. Általánosítsunk!

9. Legyen A egy $n \times k$-as mátrix, $\underline{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$, és tekintsük a mátrix alakban felírt

(E) $A\underline{x} = \underline{b}$ és **(H)** $A\underline{y} = \underline{0}$ lineáris egyenletrendszereket, ahol $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$

illetve $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$ az ismeretlenekből képezett oszlopmátrixok. Mutassuk meg a következőket.

(a) Ha $\underline{x}$ megoldása **(E)**-nek és $\underline{y}$ megoldása **(H)**-nak, akkor $\underline{x} + \underline{y}$ is megoldása **(E)**-nek.

(b) Ha $\underline{x}$ és $\underline{x}'$ megoldásai **(E)**-nek, akkor $\underline{x} - \underline{x}'$ megoldása **(H)**-nak.