

Algebra és számelmélet 2 (levelező), 2019. tavasz  
2. gyakorló (házi) feladatsor

1. Mennyi az inverziószám az alábbi permutációkban? (jelölés: az  $1, 2, \dots, 51$  képei rendre a felsorolt elemek)  
(a)  $1, 3, 5, \dots, 49, 51, 50, 48, \dots, 4, 2$ ;    (b)  $26, 27, 25, 28, 24, \dots, 51, 1$ .
2. Milyen  $k$  értékek fordul(hat)nak elő inverziószámként  $n$  elem permutációiban?
3. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát Gauss-eliminációval és az első kettőt közvetlenül a determináns definíciója alapján is.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Számítsuk ki az alábbi  $n \times n$ -es mátrixok determinánsát.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \dots & x \end{bmatrix}$$

5. Ha egy  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  mátrixra  $\det A = 5$ , akkor mennyi  $\det(A + A)$ ?
6. Egy  $2019 \times 2019$ -es mátrix minden sora számtani sorozat. Mennyi a mátrix determinánsa?
7. Egy  $n \times n$ -es mátrix elemei egész számok, és minden oszlopában az elemek összege osztható 2019-cel. Igazoljuk, hogy a determináns értéke is osztható 2019-cel.
8. Egy  $9 \times 9$ -es mátrix egyjegyű (pozitív egész) számokból áll. Minden sorban a kilenc számjegyből alkotott kilencjegyű szám 2019-cel osztható. Igazoljuk, hogy a determináns is osztható 2019-cel.