Algebra és számelmélet 2 (levelező), 2019. tavasz
4. gyakorló feladatsor

1. Van-e a $3x^4 + x^3 - 9x^2 + 3x + 2$ polinomnak teljes gyöktényezős alakja $\mathbb{R}[x]$-ben?

2. Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinomra $f(1-9i) = 0$. Igazoljuk, hogy $82 \mid f(0)$ és $81 \mid f(1)$.

3. Bontsuk fel az alábbi polinomokat irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.
$x^{12} - 1$, $x^4 + 4x^2 - 8$, $x^4 - 4x^2 + 8$, $x^4 + 4$.

4. **(a)** Hány olyan legfeljebb harmadfokú f polinom van $\mathbb{R}[x]$-ben, amelyre $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$, $f(4) = 8$?

(b) Hány olyan negyedfokú g polinom van $\mathbb{R}[x]$-ben, amelyre $g(1) = 2$, $g(2) = 4$, $g(3) = 6$, $g(4) = 8$?

5. Legyen n pozitív egész, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ páronként különböző valós számok, és legyen

$$\ell_i(x) = \frac{\prod\limits_{k \neq i,\ k \leqslant n+1} (x - a_k)}{\prod\limits_{k \neq i,\ k \leqslant n+1} (a_i - a_k)}, \text{ ha } i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

(a) Mit mondhatunk $\ell_i(a_j)$-ről (ha $i = j$, és ha $i \neq j$)?

(b) Határozzuk meg (zárt alakban) a $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \ell_i(x)$ polinomot.

6. Tegyük fel, hogy f legfeljebb n-edfokú, valós együtthatós polinom, amelyre $f(k) = 2^k$ teljesül, ha $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Határozzuk meg $f(n+1)$-et.

***7.** Ali Baba a kincset a 40 rablóra akarja hagyni, de fél, hogy azok összevesznek, és ezért olyan módszert szeretne, hogy csak akkor juthassanak hozzá, ha már legalább 25 rabló előre megegyezett, hogyan osztozkodnak. A kincshez vezető útvonalat egy számítógép rejti, ehhez csak úgy lehet hozzáférni, ha valaki bepötyögi a megfelelő jelszót, ami egy (meglehetősen nagy) természetes szám. Ali Baba az Interpol tanácsára egyenként mindegyik rablónak a fülébe súg valamit. Ha bármelyik 25 rabló összefog, akkor meg tudja fejteni a kulcsszámot, de 24-en hiába próbálkoznak, együttesen sem lesz semmilyen információjuk a számról. Mit tanácsolt Ali Babának az Interpol(áció)?

***8.** Számítsuk ki a $\Phi_n(x)$ körosztási polinom 1 helyen fölvett értékét (azaz $\Phi_n(1)$-et), ha

(a) $n = p$ prímszám;

(b) $n = p^k$, ahol p prímszám, $k \geqslant 2$ pedig pozitív egész;

(c) $n = p_1 p_2 \ldots p_s$, ahol p_1, p_2, …, p_s egymástól különböző prímszámok;

(d) n tetszőleges pozitív egész szám.