Algebra és számelmélet 2 (levelező), 2019. tavasz
5. gyakorló feladatsor

1. Az alábbi vektorrendszerek közül melyek F?

(a) $\mathbb{R}^4$-ben $(1, 2, 3, 4)$, $(2, 5, 8, 11)$, $(4, 9, 14, 19)$;
(b) $\mathbb{R}[x]$-ben három tetszőleges különböző fokú polinom;
(c) $\mathbb{C}$ -ben mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben három tetszőleges komplex szám;
(d) $\mathbb{R}$ -ben mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérben $\lg 3$, $\lg 5$, $\lg 7$.

2. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Egy vektor önmagában mindig F.
(b) Két vektor pontosan akkor Ö, ha valamelyik a másik skalárszorosa.
(c) Két vektor pontosan akkor Ö, ha mindegyik a másik skalárszorosa.
(d) Három vektor pontosan akkor Ö, ha valamelyikük egy másik skalárszorosa.

3. Adjunk meg négy olyan Ö vektort, amelyek közül bármelyik három F.

4. Melyek alkotnak B-t $\mathbb{R}^3$-ban?

(a) $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 5)$;
(b) $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 0)$, $(3, 2, 1)$;
(c) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$;
(d) $(1, 2, 8)$, $(7, 5, 3)$, $(\pi, 2, 9)$, $(\lg 2, \sqrt{3}, 2017)$.

5. Mennyi az alábbi, $\mathbb{R}$ feletti vektorterek dimenziója? (A műveletek a „szokásosak".)

(a) $\mathbb{C}$;
(b) azok a valós számnégyesek, ahol a koordináták összege 0;
(c) a szimmetrikus $n \times n$-es mátrixok;
(d) a végtelen számtani sorozatok;
(e) azok a legfeljebb 6-odfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, amelyekre $f(\pi) = 0$;
(f) azok a legfeljebb 6-odfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomok, amelyekre $f(1 + i) = 0$;
(g) a legfeljebb 5-ödfokú **komplex** együtthatós polinomok és a 0 ($\mathbb{R}$ felett!);

6. Tegyük fel, hogy $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ B egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben. Mi mondható F/Ö, G, B szempontból az alábbi vektorokról?

(a) $\underline{u}_1, \underline{u}_1 + 2\underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_1 + n\underline{u}_n$;
(b) $\underline{u}_1 - \underline{u}_2, \underline{u}_2 - \underline{u}_3, \ldots, \underline{u}_n - \underline{u}_1$;
(c) $\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{u}_2 + \underline{u}_3, \ldots, \underline{u}_n + \underline{u}_1$;
(d) $\underline{u}_1 - \underline{u}_2, \underline{u}_2 - \underline{u}_3, \ldots, \underline{u}_{n-1} - \underline{u}_n$.